

Integrale Definito

Il concetto d'integrale nasce per risolvere due classi di problemi:

Integrale Definito

- Calcolo delle aree di fig. delimitate da curve
- calcolo di volumi
- calcolo del lavoro di una forza
- calcolo dello spazio percorso

Integrale Indefinito

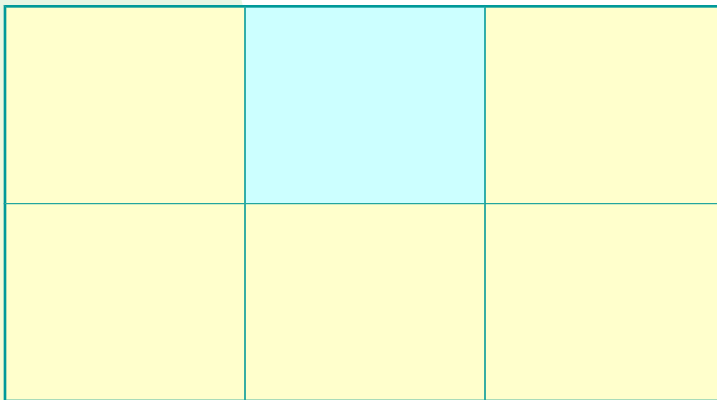
- Problema inverso del calcolo della derivata:
*nota la derivata di una funzione
calcolare la funzione stessa.*

Calcolo delle Aree

- Area dei poligoni:

È la situazione più semplice in quanto qualunque poligono può essere scomposto in triangoli e la sua area ricondotta all'area di un rettangolo equivalente.

Area del Rettangolo



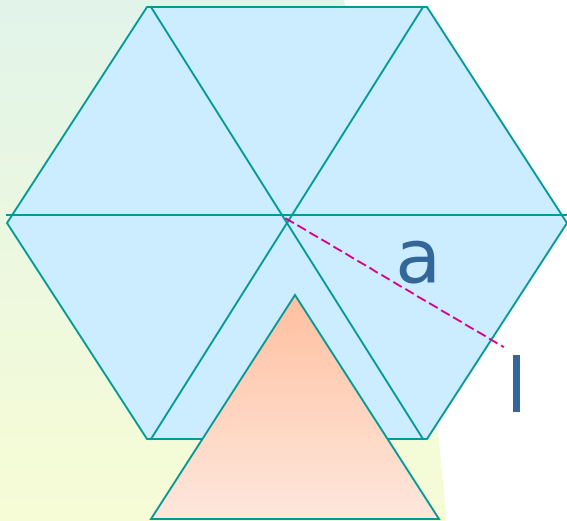
$$A = b \cdot h$$

Basta ricoprire la superficie del rettangolo con quadratini di area unitaria

■ Poligoni regolari

Scomponendoli in triangoli congruenti è facile calcolare l'area

Area di un Esagono



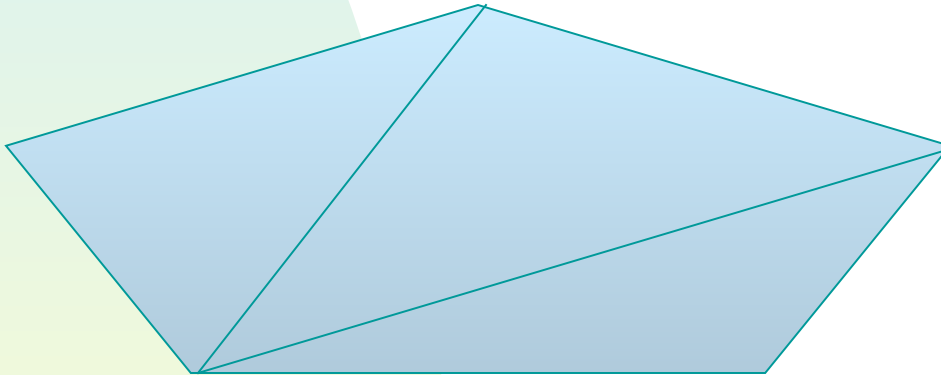
$$A_{triangolo} = \frac{l \cdot a}{2}$$

$$A_{poligono} = \frac{a \cdot l}{2} \cdot n = \frac{a \cdot l \cdot n}{2} = \frac{a \cdot (l \cdot n)}{2} = \frac{a \cdot p}{2}$$

- Poligoni Irregolari

Basta scomporli opportunamente in triangoli

Area di un Poligono qualsiasi



$$A_{poligono} = \sum_1^n A_{triangoli}$$

■ Area del Cerchio

Il calcolo dell'area è molto più complesso in quanto non è possibile scomporre il cerchio in triangoli.

E' possibile però calcolare l'area per approssimazioni successive:

Indichiamo con A la classe dei poligoni regolari inscritti nel cerchio, di 3, 4, 5, 6, n lati rispettivamente e con $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$ le relative aree;

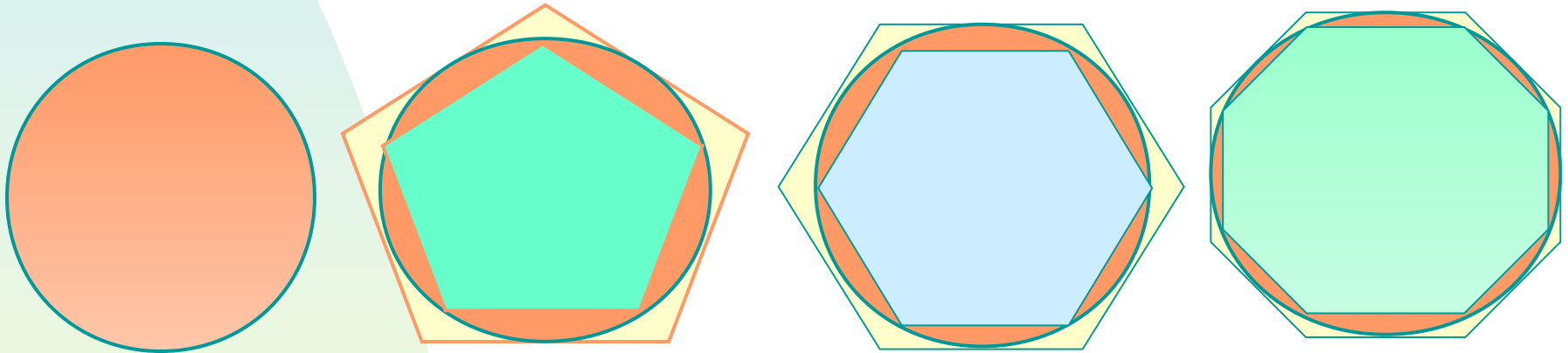
e con B la classe dei poligoni regolari circoscritti al cerchio di 3, 4, 5, 6, \dots, n lati e con $b_3, b_4, b_5, \dots, b_n$ le rispettive aree.

Se S è l'area del cerchio (incognita) sarà sempre:

$$a_n \leq S \leq b_n$$

e passando al limite di infiniti lati :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = S = \text{Area Cerchio}$$

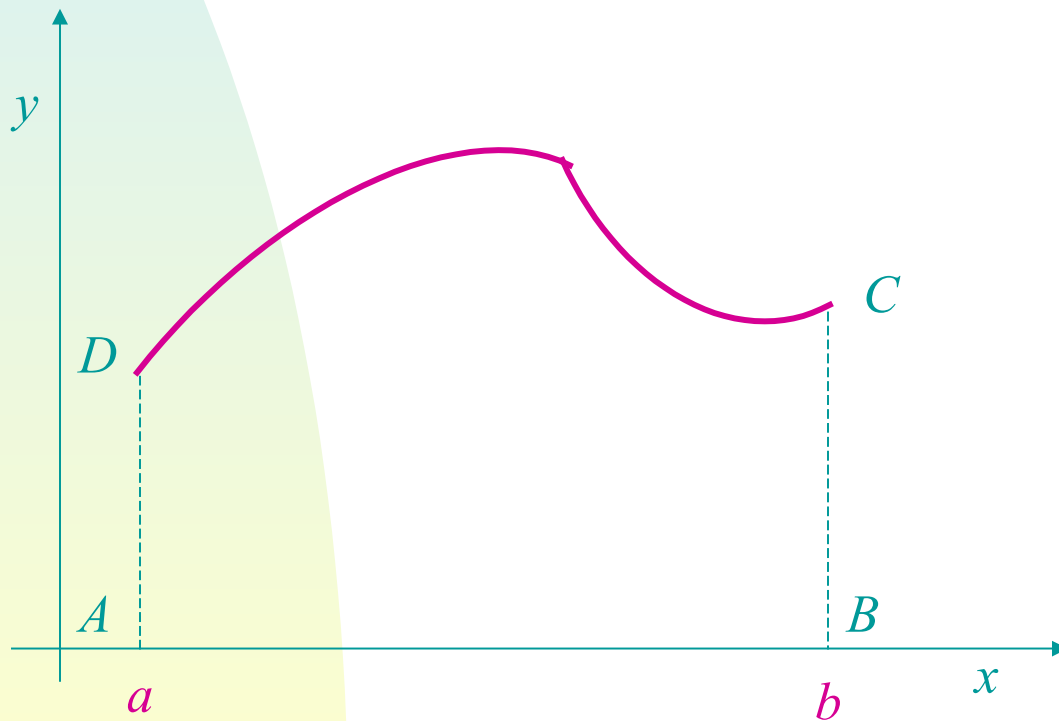


Allora: L'area del cerchio è uguale al limite comune, quando il numero lati $\rightarrow \infty$, al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio

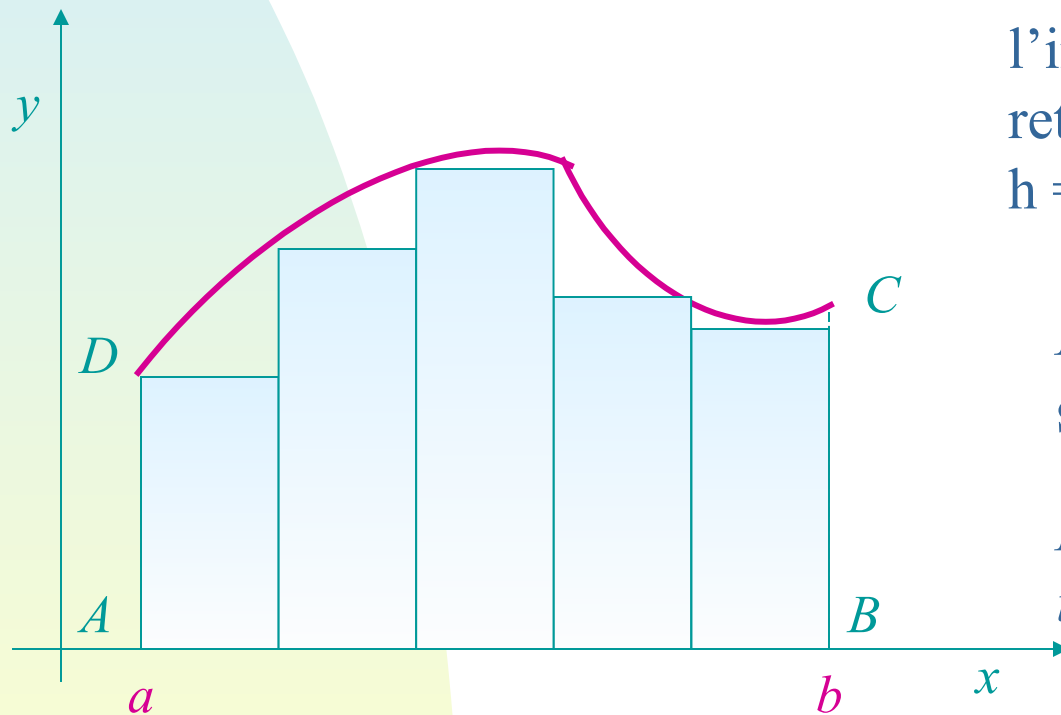
Integrale Definito - Calcolo delle Aree

■ Area del Trapezoide

Vogliamo calcolare l'area della figura mistilinea determinata dal diagramma di una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, b]$



*Possiamo determinare l'area approssimandola con
dei rettangoli inscritti e dei rettangoli circoscritti
Utilizzando lo stesso metodo usato per il cerchio.*

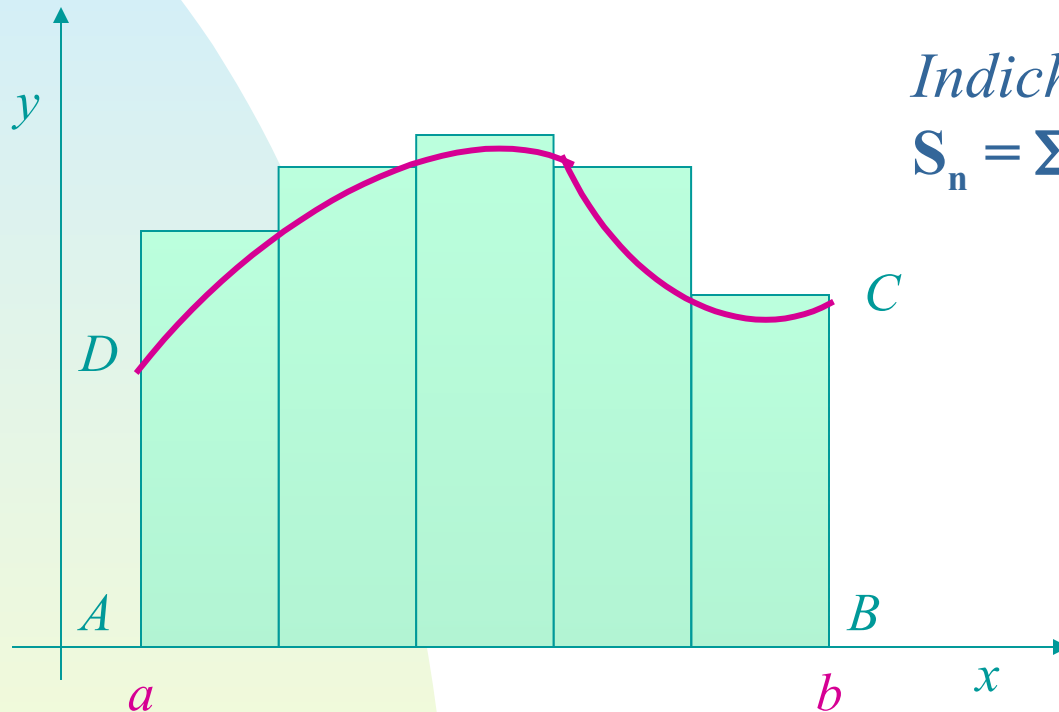


Dividendo in n parti
l'intervallo $[a, b]$, avremo n
rettangoli di base
 $h = (b - a)/n$

Indichiamo con
 $s_n = \Sigma \text{ areaRett}_{\text{inscritti}}$

L'area del plurirettangolo
inscritto

Analogamente possiamo determinare l'area S_n del plurirettangolo circoscritto



Indichiamo con
 $S_n = \Sigma \text{ areaRett}_{\text{circoscritti}}$

L'area S del trapezoide sarà sempre compresa tra s_n e S_n

$$\Sigma \text{ areaRett}_{\text{inscritti}} \leq \textcolor{violet}{S} \leq \Sigma \text{ areaRett}_{\text{circoscritti}}$$

*Aumentando il numero dei rettangoli
l'approssimazione di S sarà sempre più precisa.*

Considerando un numero di rettangolini via via crescente
avremo due successioni di aree di

plurirettangoli inscritti $s_1, s_2, \dots s_n, \dots$ e di

plurirettangoli circoscritti $S_1, S_2, \dots S_n, \dots$

che convergono all'area del trapezoide ABCD

Teorema 1. Se $y = f(x)$ è continua e positiva in $[a, b]$, allora le
successioni delle aree $s_1, s_2, \dots s_n, \dots$ e $S_1, S_2, \dots S_n, \dots$
convergono allo stesso limite S uguale all'area del trapezoide
ABCD

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$$

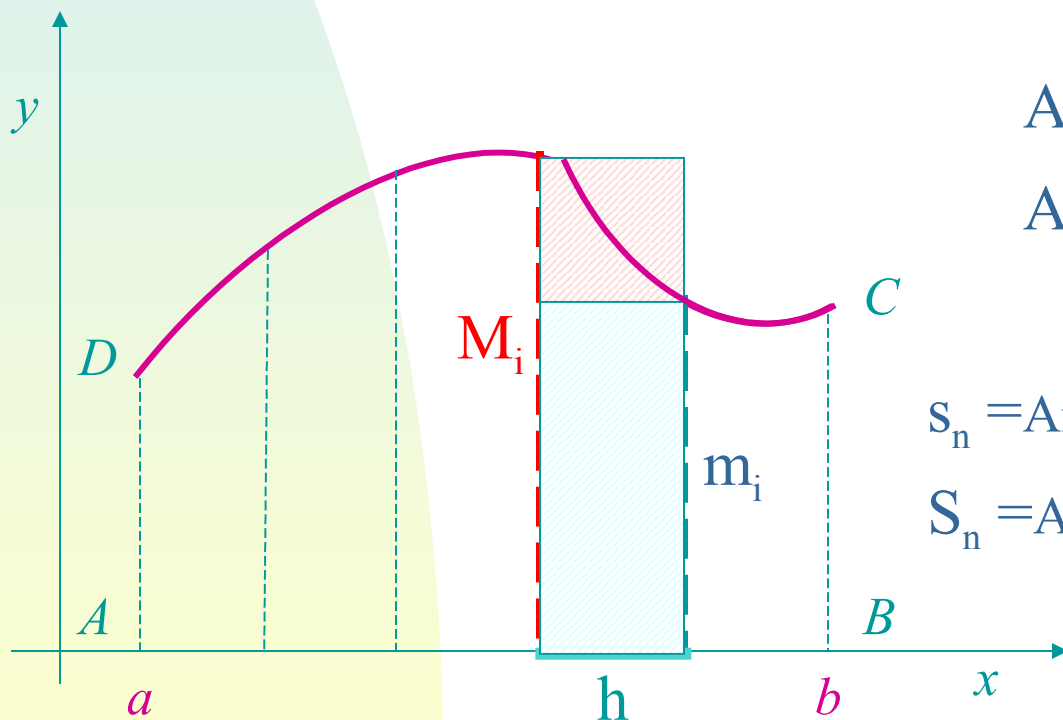
Possiamo finalmente giungere al concetto d'integrale definito

■ Integrale Definito

Data la funzione $y=f(x)$ definita e continua in $[a, b]$,

dopo aver diviso l'intervallo in n parti, indichiamo con

$m_i = \min f(x)$ e con $M_i = \max f(x)$ nell'intervallino i -esimo di ampiezza h



$$ARett_{circo.} = M_i \cdot h$$

$$ARett_{inscr.} = m_i \cdot h$$

$$S_n = \text{AreaPluriRett}_{inscr.} = \sum m_i \cdot h$$

$$S_n = \text{AreaPluriRett}_{circo.} = \sum M_i \cdot h$$

Allora, indicando con $f(\varepsilon_i)$ il valore della funzione in un punto qualsiasi dell'intervallo i -esimo, tenendo conto del teorema del confronto e del teorema 1

$$m_i \leq f(\varepsilon_i) \leq M_i$$

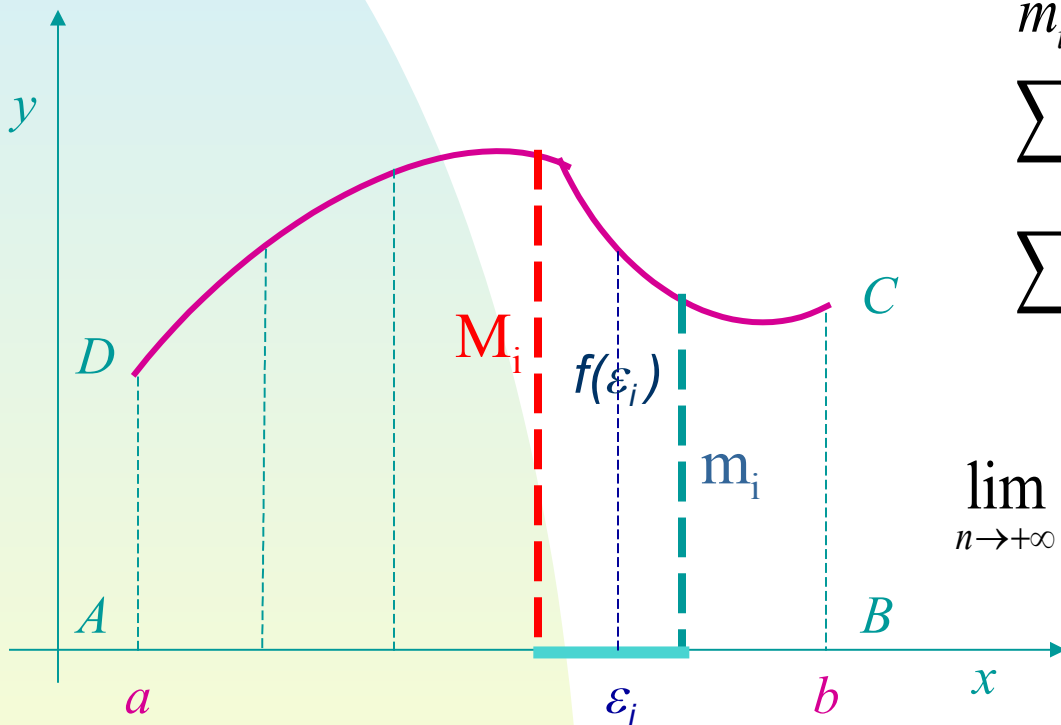
$$\sum m_i \leq \sum f(\varepsilon_i) \leq \sum M_i$$

$$\sum m_i \cdot h \leq \sum f(\varepsilon_i) \cdot h \leq \sum M_i \cdot h$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum m_i \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum M_i \cdot h = S$$

avremo che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum m_i \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum M_i \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum f(\varepsilon_i) \cdot h = S$$



Allora, possiamo dare la seguente definizione:

Def. Data la funzione $y=f(x)$ definita e continua in $[a, b]$, si dice Integrale definito di $f(x)$ relativo all'intervallo $[a, b]$ il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum m_i \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum M_i \cdot h = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum f(\varepsilon_i) \cdot h = S$$

e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx$$

■ Proprietà dell'Integrale definito

$$a) \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad b) \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Proprietà di linearità

$$c) \quad \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$d) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

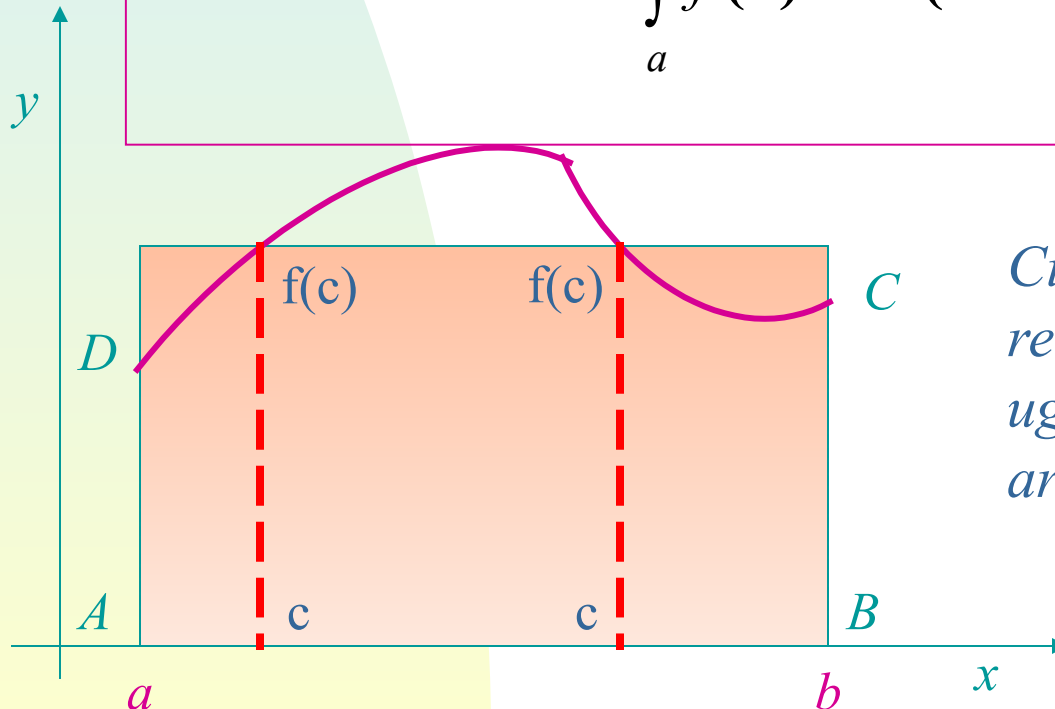
Proprietà di additività

$$e) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

■ Teorema della Media

Se $y = f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$



Cioè esiste sempre un rettangolo di base AB e altezza uguale a $f(c)$ avente la stessa area del rettangoloide.

■ Funzione Primitiva

Il calcolo dell'integrale come $\lim \Sigma$ è estremamente complesso e per nulla conveniente, occorre allora trovare un altro sistema per calcolarlo.

abbiamo bisogno di vedere il concetto di primitiva e il teorema di Torricelli-Barrow

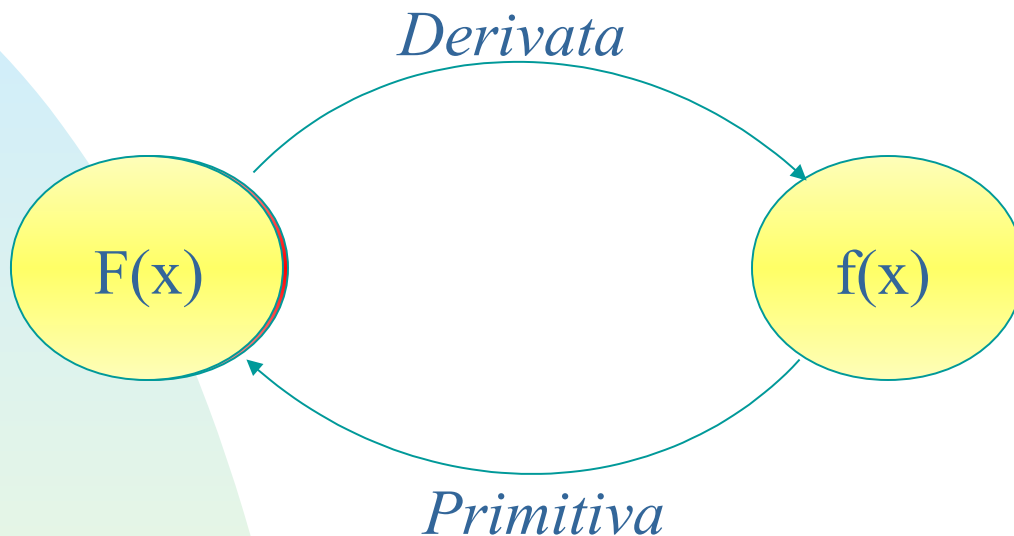
Il problema del calcolo della Primitiva è il problema inverso del calcolo della derivata:

calcolare la primitiva significa:

data la derivata $f(x)$ di una certa funzione non nota $F(x)$

calcolare la funzione $y=F(x)$,

$$\text{quindi } F'(x) = f(x)$$



Def. Diremo che $F(x)$ è una primitiva della funzione $y=f(x)$ in $[a, b]$

sse $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e risulta:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

■ Primitive, alcuni esempi:

$$\text{Primitiva } (2x) = x^2 \quad \text{--- infatti} \rightarrow D(x^2) = 2x$$

$$\text{Primitiva } (\cos x) = \sin x \quad \text{--- infatti} \rightarrow D(\sin x) = \cos x$$

$$\text{Primitiva } (1/x) = \ln x \quad \text{--- infatti} \rightarrow D(\ln x) = 1/x$$

$$\text{Primitiva } (1/\cos^2 x) = \tan x \quad \text{--- infatti} \rightarrow D(\tan x) = 1/\cos^2 x$$

Osserviamo anche che:

$$D(x^2 - 1) = 2x \quad \text{--- quindi} \rightarrow \text{Primitiva } (2x) = x^2 - 1$$

$$D(x^2 + 5) = 2x \quad \text{--- quindi} \rightarrow \text{Primitiva } (2x) = x^2 + 5$$

$$D(x^2 + a) = 2x \quad \text{--- quindi} \rightarrow \text{Primitiva } (2x) = x^2 + a$$

■ Oss

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora
anche $G(x) = F(x) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$ è una primitiva di $f(x)$

e viceversa

se $F(x)$ e $G(x)$ sono primitive di $f(x)$ allora

$$G(x) = F(x) + c$$

Allora una funzione ammette infinite primitive che differiscono per una costante reale e costituiscono una famiglia di infinite curve ottenibili per traslazione secondo l'asse y .

■ Def

L'insieme di tutte le primitive di una funzione $y = f(x)$ si chiama **INTEGRALE INDEFINITO** di $f(x)$,

si indica col simbolo:

$$\int f(x)dx$$

e si legge “Integrale indefinito di $f(x)$ in dx ”

Allora, riprendendo gli esempi precedenti

$$\int f(x)dx = \{ \mathbf{Pr imitive}(f(x)) \}$$

$$\int 2x dx = \{ \mathbf{Pr imitive}(2x) \} = x^2 + c$$

$$\int \mathbf{cos} x dx = \{ \mathbf{Pr imitive}(\mathbf{cos} x) \} = \mathbf{sin} x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \left\{ \mathbf{Pr imitive}\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = \mathbf{ln} x + c$$

$$\int \frac{1}{\mathbf{cos}^2 x} dx = \left\{ \mathbf{Pr imitive}\left(\frac{1}{\mathbf{cos}^2 x}\right) \right\} = \mathbf{tg} x + c$$

$$D\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

$$D(x^2 + c) = 2x$$

$$D(\mathbf{sin} x + c) = \mathbf{cos} x$$

$$D(\mathbf{ln} x + c) = \frac{1}{x}$$

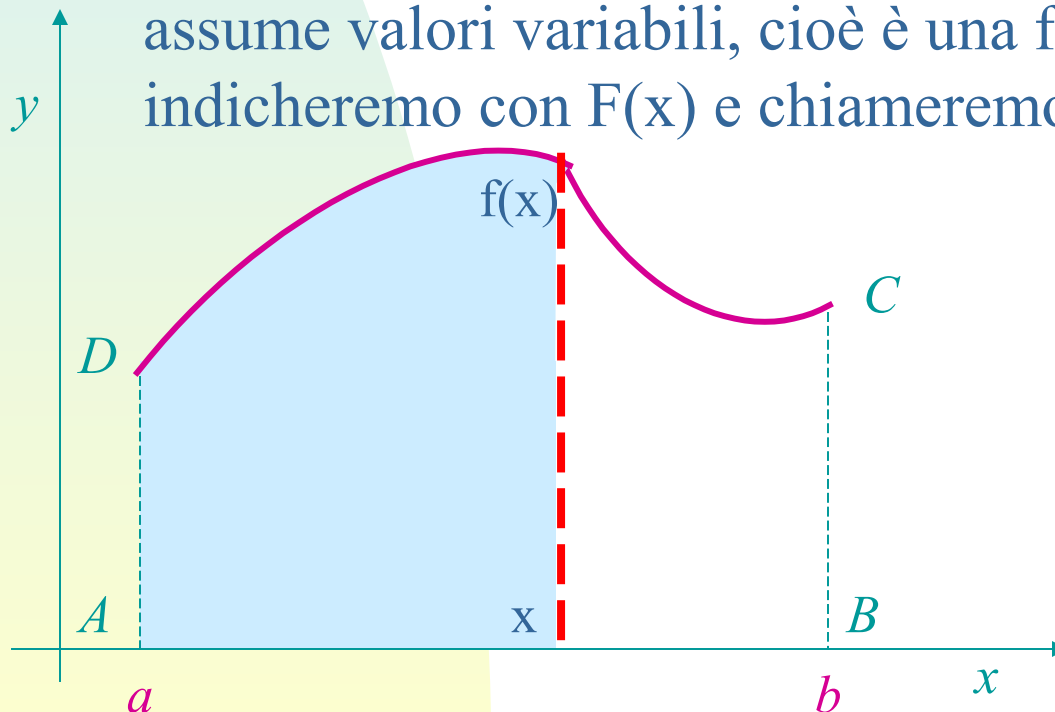
$$D(\mathbf{tg} x + c) = \frac{1}{\mathbf{cos}^2 x}$$

■ Teor. di Torricelli- Barrow (funzione Integrale)

Sia $y = f(x)$ funz. continua nell'intervallo $[a, b]$,
consideriamo un punto x variabile $\in (a, b)$

Al variare di x l'integrale $\int_a^x f(t)dt$

assume valori variabili, cioè è una funzione di x che
indicheremo con $F(x)$ e chiameremo funzione integrale



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

In particolare

$$\text{Se } x = a \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{se } x = b \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Avremo allora il seguente

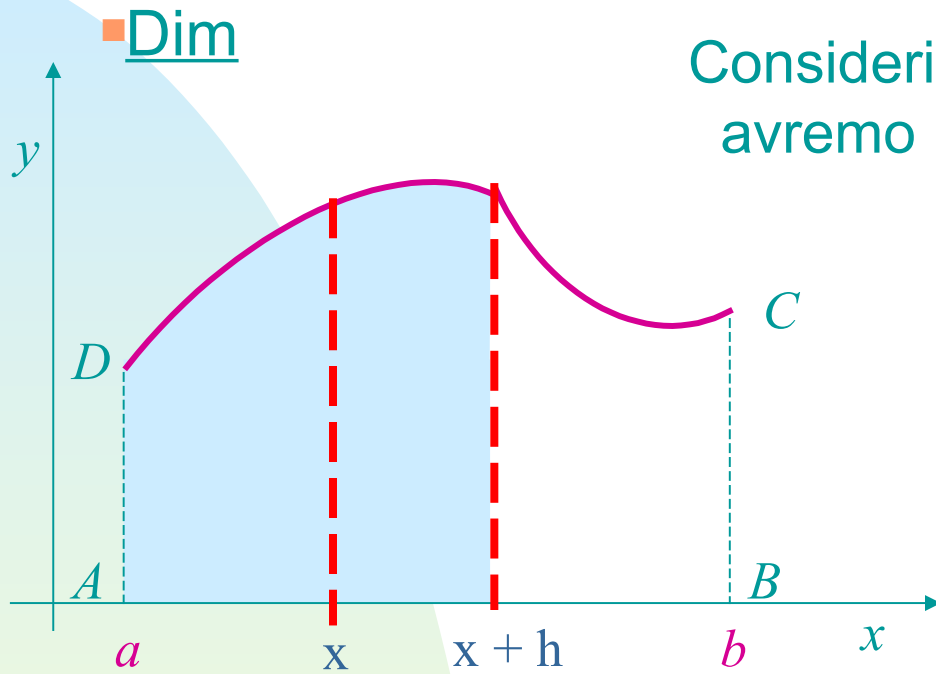
■ Teor. di Torricelli- Barrow

Se $y = f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e risulta: $F'(x) = f(x)$;

cioè $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

L'incremento di $F(x)$ (area del rettangoloide di base $x, x+h$) è:

$$\Delta F = F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

semplificando

$$\Delta F = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

e, per il teorema della media:

$$\Delta F = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h$$

da cui, avremo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta F}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

e, passando al limite per $h \rightarrow 0$,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Cioè la derivata di $F(x) = f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

■ Calcolo dell'Integrale Definito

Formula di Newton-Leibniz

Finalmente possiamo calcolare l'integrale definito

$$\int_a^b f(t)dt = \text{area trapezoide}$$

Considerando la funzione integrale avremo:

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) + c \quad \text{e per } x = a \quad \int_a^a f(t)dt = G(a) + c = 0$$

$$\text{Da cui } c = -G(a) \quad \int_a^x f(t)dt = G(x) + c = G(x) - G(a)$$

e per $x = b$

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

■ Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale definito di una funzione continua $y=f(x)$, calcolato nell'intervallo $[a, b]$, è uguale alla differenza tra i valori che una qualunque primitiva di $f(x)$ assume agli estremi superiore e inferiore dell'intervallo d'integrazione.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$



Fine Lezione